CONCOURS 1987 — OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 2 heures

Ce problème a pour objet l'étude d'une méthode d'approximation d'une intégrale convergente de la forme : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)\,dt}{t^\alpha}$ où $\alpha \in]0, 1[$ et f de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

A. *Approximation d'une intégrale définie sur* $[-1, 1]$

1. On cherche cinq points réels $x_5 \leqslant x_4 \leqslant x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_1$ tels que, pour tout polynôme P réel de degré $\leqslant 5$, on ait :

(1) $\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx = A \sum_{i=1}^{5} P(x_i)$ où A est une constante à déterminer.

a. Montrer que la condition (1) équivaut aux conditions :

(2) $\forall k \in [0 \ldots 5] \quad \int_{-1}^{+1} x^k\,dx = A \sum_{i=1}^{5} x_i^k$.

b. Montrer : $A = \frac{2}{5}$.

c. Prouver que si $(x_5, \ldots, x_1)$ est une solution de (1), alors $(-x_1, \ldots, -x_5)$ est aussi solution.

2. On considère le polynôme $Q(x) = x^5 - \sigma_1 x^4 + \sigma_2 x^3 - \sigma_3 x^2 + \sigma_4 x - \sigma_5$ dont les zéros sont $(x_5, \ldots, x_1)$, une solution de (1) et on pose :

$$S_k = \sum_{i=1}^{5} x_i^k.$$

On admettra sans démonstration les formules de Newton :

$$S_1 = \sigma_1,$$
$$\forall k \in [2 \ldots 5],$$
$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 \ldots + (-1)^{k-1} S_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0.$$

a. Montrer que les conditions (2) équivalent à un système linéaire Σ aux inconnues $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$. Expliciter Σ.

b. Démontrer que Σ, et donc (1), n'admet qu'une seule solution $(x_5, \ldots, x_1)$ et que : $x_5 = -x_1$, $x_4 = -x_2$ et $x_3 = 0$.

c. Donner les valeurs exactes de x_1 et x_2, puis des valeurs approchées à 10^{-6} près.

3. Soit $K = \int_{-1}^{+1} h(x)\,dx$ où h est continue sur $[-1, 1]$. On prend pour valeur approchée de K : $K' = \frac{2}{5} \sum_{i=1}^{5} h(x_i)$ où $(x_5, \ldots, x_1)$ est solution de (1).

a. Calculer la valeur exacte de $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+t}$.

b. En se ramenant à une intégration sur $[-1, +1]$, calculer une valeur approchée J' de J, par la méthode ci-dessus. Comparer à la valeur exacte.

B. *Approximation de* I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction numérique de classe C^∞ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On peut écrire une formule de Taylor à l'ordre n :

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(t) = T_n(t) + R_n(t).$$

Tournez la page S. V. P.

page 158 ECOLE SUPERIEURE d'INGENIEURS de MARSEILLE 1987 Mathématiques appliquées

a. Soit g définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $g(t) = \frac{R_n(t)}{t^\alpha}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Prouver que g est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b. Soit $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t^\alpha}\, dt$, on choisit $n = 4$. Écrire la formule ramenant le calcul de I à celui de $J = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\, dt$.

2. Exemple : on note log, le logarithme népérien.

a. Montrer que $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1-t)}{t^{3/2}}\, dt$ est convergente et qu'en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$, les hypothèses du § B.1 sont vérifiées.

b. Exprimer I en fonction de J par la méthode du § B.1.*b* et calculer une valeur approchée J′ de J. (On fera les calculs par la méthode de la partie A, avec 6 décimales). En déduire une valeur approchée I′ de I.

c. Montrer que :

$$K = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\log(1-x)}{x^{3/2}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log t}{(1-t)^{3/2}}\, dt \quad \text{est convergente.}$$

Calculer les expressions :

$$A_k = \int t^k \log t\, dt,\ k \in \mathbb{N}.$$

Calculer une valeur approchée K′ de K en adaptant la méthode précédente de calcul approché d'une intégrale généralisée.

On prendra de même $n = 4$ et on fera les calculs avec 6 décimales.

d. Calculer I et K à l'aide de primitives. Comparer aux valeurs approchées I′ et K′ obtenues.

• • •